文章编号:1000-4939(2022)05-0922-10

一种星形蜂窝结构面内等效力学性能的计算方法

黄泽彬,蓝林华,孙静

(广州大学土木工程学院,510000 广州)

摘　要:多胞结构由于具有各种优良的力学性能而在工程中被广泛地应用。本研究针对星形蜂窝结构,给出了其在弹性变形范围内面内等效力学性能的理论计算模型。首先针对代表性胞元分析其在不同方向承受荷载时的变形行为,利用对称性对胞元进一步简化的同时运用能量法计算得到了结构胞元的等效位移、杨氏模量和泊松比,然后利用参数分析进一步研究了主要几何参数和材料参数对星形结构面内等效力学性能的影响以及通过参数设计得到结构不同的力学性能。本研究的理论计算方法是建立在求解一系列方程的基础上,相比于试验方法,它节时节力又经济,相比于采用通用有限元程序对具有复杂边界条件的结构及繁琐的结构进行建模,效率更高、局限更小。

关键词:星形蜂窝结构;能量法;力学性能;负泊松比;等效参数

中图分类号:O39　　**文献标志码:**A　　**DOI:**10.11776/j.issn.1000-4939.2022.05.014

Stablishing method of constitutive relation of star-shaped honeycomb structure tittle

HUANG Zebin, LAN Linhua, SUN Jing

(School of Civil Engineering, Guangzhou University, 510000 Guangzhou, China)

Abstract: Multi-cell structure is widely used in engineering due to its various excellent mechanical properties. In this paper, a theoretical model for calculating the in-plane equivalent mechanical properties of star-honeycomb structures in the range of elastic deformation is presented. First, the deformation behavior of the representative cells is analyzed when they are loaded in different directions. We use the symmetry of the representative cell to further simplify its analysis, and the energy method to calculate the equivalent displacement, equivalent Young's modulus and equivalent Poisson's ratio of the structure cell. Then, the influence of main geometric parameters and material parameters on the in-plane equivalent mechanical properties of the star-shaped structure is further studied by using parameter analysis. In addition, various mechanical properties of honeycomb structure are obtained through parameter design. The theoretical calculation method in this paper is based on solving a series of equations. Compared with the experimental method, the theoretical calculation method saves time, energy and economy. The general finite element program has the characteristics of complex boundary conditions and complex structure in modeling, so the theoretical calculation method is more efficient and has better limitations than the general finite element program.

收稿日期:2021-04-08　　**修回日期:**2022-06-17
基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 11902086)
通信作者:蓝林华。E-mail: lhlan@gzhu.edu.cn
引用格式:黄泽彬,蓝林华,孙静. 一种星形蜂窝结构面内等效力学性能的计算方法[J]. 应用力学学报,2022,39(5):922-931.
HUANG Zebin, LAN Linhua, SUN Jing. Stablishing method of constitutive relation of star-shaped honeycomb structure tittle[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2022, 39(5):922-931.

Key words: star-honeycomb structure; energy method; mechanical propertiy; negative Poisson's ratio; equivalent parameter

负泊松比(negative Poisson's ratio,NPR)材料是一种纵向拉伸时横向膨胀、纵向压缩时横向收缩的特殊材料。它通常是一种多胞结构,具有许多优异的力学性能,比强度高、比刚度大、隔音隔热性能好等,因此在航空航天、车辆舰船、包装工程等领域已有广泛应用[1-5]。早在 160 多年前,就有学者提出负泊松比材料存在的可能性[6],但直到 1944 年,Sharpe 等[7]才首次证明了天然材料中黄铁矿具有负泊松比特性。自 Lakes[8]首次通过对普通聚氨酯泡沫的处理得到人造负泊松比材料以来,各种新型先进负泊松比材料与结构得到快速发展,因此对负泊松比材料力学性能方面研究也至关重要。Zi 等[9]提出在负泊松比内凹蜂窝结构胞元中添加一条窄肋提高结构的面内刚度和降低结构的重入拓扑行为;Sun 等[10]提出了 3 种具有各向同性的负泊松比多功能分级蜂窝结构的有效面内弹性公式和电导率的公式,并研究壁厚和长细比对结构杨氏模量、剪切模量、体积模量和传输能力的影响;Wang 等[11]运用均质化研究了负泊松比内凹六边形蜂窝结构的面内等效力学性能以及结构几何参数对弹性特征的影响;马芳武等[12]针对具有相同几何参数的内凹三角形负泊松比材料,研究了在不同冲击倾角(0°~10°)、不同冲击速度(20~70 m/s)下的面内动态冲击特性,并得到最佳冲击倾角为 4°时诱发了稳定有序的变形模式;周宏元等[13]提出 1 种填充负泊松比泡沫混凝土的新型复合三明治结构,并研究了不同填充物对结构面内压缩性能的影响并且比较了破坏模式和吸能特性。更多的关于负泊松比研究见文献[14-20]。

近年来,一种负泊松比星形节点周期性蜂窝结构,因其在正交方向都体现负泊松比效应引起了相关学者的关注。Theocaris 等[21]最早提出了利用星形内凹结构作为复合物中的填充物;Reis 等[22]使用离散渐近均质化方法,对星型结构辅助材料的变形机理和等效均质机械性能进行了分析;Gong 等[23]提出了 1 种可以在 2 个正交方向上实现零泊松比的星型蜂窝结构,并通过约束非变形方向上的泊松效应进而避免变形方向上刚度的增加;Meng 等[24]使用能量法和布洛赫定理研究了星形蜂窝状结构的有效特性和波传播特性;王梁等[25]将星型蜂窝结构与内凹六边形蜂窝结构进行结合设计出 1 种 X 型蜂窝模型,解耦出 X 型结构的等效弹性模量和等效泊松比的解析解,并对结构主要参数内凹角、单元厚度和外夹角进行了分析;韩会龙等[26]讨论了冲击速度和微结构参数对星形蜂窝材料的宏/微观变形、密实应变和动态冲击强度的影响,并给出了密实应变公式;负昊等[27]采用有限元方法对星型蜂窝结构离散并结合 Bloch 定理来分析弹性波在其内部传播的带隙问题,得出了星形节点周期结构蜂窝材料存在宽大的频率禁带且禁带的位置和大小相对稳定的结论;卢子兴等[28]基于 1 种新型星型-箭头蜂窝模型,采用 ANSYS/LS-DYNA 有限元分析软件对其在不同冲击速度和不同相对密度下的变形模式进行了数值模拟研究,得出星型-箭头蜂窝在不同冲击速度下存在 3 种变形模式的结论;Wang 等[29]提出 1 种基于负泊松比星形蜂窝结构材料的车门防撞梁,研究了结构的基本力学性能和宏观性能,并对结构进行了确定性优化和可靠性优化,提高了结构的性能和稳定性。

然而,上述学者的研究,多集中于使用试验或数值模拟。通常的试验方法,耗时费力又不经济。随着计算科学的发展,采用通用有限元程序对大型复杂结构进行结构建模及力学仿真已成为现实,然而,在结构系统建模过程中,详细的建模将大大增加模型规模和难度,同时复杂多样的结构及边界条件也使得模型具有一定的局限性。如何提高效率,是工程技术人员面临的难题。

本研究针对星形蜂窝结构,给出了其在弹性变形范围面内等效力学性能的理论计算模型,该模型可以通过调整几何参数和材料参数,得到工程技术人员需要的面内等效力学性能。首先针对代表性胞元分析其在不同方向承受荷载时的变形行为,胞元的每一个壁板被看成是受弯曲和轴向荷载共同作用的梁,利用对称性对胞元进一步简化的同时运用能量法计算得到了结构胞元的等效位移、杨氏模量和泊松比,然后利用参数分析进一步研究主要几何参数对星形蜂窝结构面内等效力学性能的影响。研究验证了该结构具有明显的负泊松比效应,而且能够通过参数设计得到不同的力学性能,随后的数值模拟结果进一步验证了本研究方法的有效性。本研究的理论计算方法是建立在求解一系列方程的基础上,相比于试验方法,它节时节力又经济,相比于采

用通用有限元程序对具有复杂边界条件的结构及繁琐的结构进行建模,效率更高、局限更小。

1　理论模型

1.1　几何参数

周期性星型蜂窝结构及其代表胞元如图 1 所示,代表胞元具有水平和垂直对称性。其中 L_1 是胞元壁板 AB 的长度,L_2 是胞元壁板 BC 的长度,L_3 是胞元壁板 CD 的长度,L_4 是胞元壁板 DE 的长度,θ_1 是胞元壁板 AB 与壁板 BC 的夹角,θ_2 是胞元壁板 CD 与壁板 DE 的夹角,假定所有胞元壁板具有均质的矩形截面,b 是胞元壁板的厚度,t 是胞元壁板的深度。代表胞元完全可以由这 8 个几何参数表征,即 $\theta_1,\theta_2,L_1,L_1,L_2,L_3,L_4,b,t$。

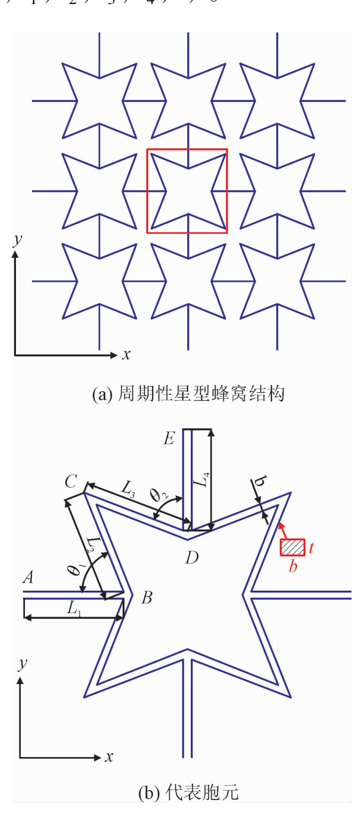


图 1　星型蜂窝结构

Fig. 1　Star honeycomb structure

为防止胞元壁板之间出现接触和相交,几何参数需满足以下约束,即

$$\theta_1+\theta_2>90° \tag{1a}$$

$$L_2\sin\theta_1>L_3\cos\theta_2 \tag{1b}$$

$$L_3\sin\theta_2>L_2\cos\theta_1 \tag{1c}$$

1.2　相对密度

相对密度是控制多胞元周期性结构刚度、强度和韧性的重要参数,忽略壁板接头处重叠部分,如图 1(b)所示,星型蜂窝结构代表胞元 x-y 方向相对密度为

$$\rho=\frac{A_s}{A_\alpha}=\frac{b(L_1+2L_2+2L_3+L_4)}{2(L_1+L_3\sin\theta_2-L_2\cos\theta_1)(L_4+L_2\sin\theta_1-L_3\cos\theta_2)} \tag{2}$$

其中:A_s 为代表胞元胞元壁板所占面积;A_α 为胞元壁板有效总面积。

1.3　结构分析

1.3.1　星型蜂窝结构 x 方向受力分析

图 2(a)为周期性星型蜂窝结构 x 方向受力的示意图,其中 σ_x 为沿 x 方向的拉伸应力,结构处于弹性变形阶段。如图 2(b)所示,从周期星型蜂窝结构中切出一个代表胞元进行力学分析,由于胞元具有水平和垂直对称性,可将胞元简化为四分之一胞元。如图 2(c)所示,E 截面铰支,AB 壁板约束 y 方向位移和 z 方向转角,DE 壁板约束 x 方向位移和 z 方向转角。由于四分之一胞元的特殊性以及边界约束条件,四分之一胞元最终可以简化为只分析包含 BC 斜壁板和 CD 斜壁板的简化结构,如图 2(d)所示。四分之一胞元在 x 方向上的有效横截面积和总拉伸力分别为

$$A_x=t\left(L_4+L_2\sin\theta_1-L_3\cos\theta_2+\frac{b}{2}\right) \tag{3a}$$

$$F_x=\sigma_xA_x \tag{3b}$$

如图 2(d)所示,在 B 点虚加方向垂直向下、大小为 $F_y=0$ 的力,对于细长的薄壁结构,与拉伸和弯曲引起的挠曲变形相比,可以忽略由于剪切引起的挠曲变形[30],可求得 BC 壁板和 CD 壁板的轴力方程和弯矩方程表达式分别为

$$F_{BCN}=F_y\sin\theta_1-F_x\cos\theta_1 \tag{4a}$$

$$M_{BC}=-x(F_x\sin\theta_1+F_y\cos\theta_1),(0\leqslant x\leqslant L_2) \tag{4b}$$

$$F_{CDN}=F_x\sin\theta_2-F_y\cos\theta_2 \tag{4c}$$

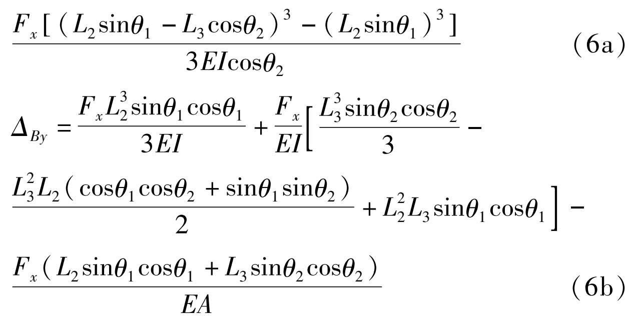
$$M_{CD}=-x(F_x\cos\theta_2+F_y\sin\theta_2)+L_2(F_x\sin\theta_1+F_y\cos\theta_1),(0\leqslant x\leqslant L_3) \tag{4d}$$

由能量法可知

$$\Delta_i = \int_0^l \frac{M}{EI}\cdot\frac{\partial M}{\partial F_i}\mathrm{d}s + \int_0^l \frac{F_N}{EA}\cdot\frac{\partial F_N}{\partial F_i}\mathrm{d}s \tag{5}$$

其中：E 为壁板的杨氏模量；I 为壁板截面极惯性矩；A 为壁板截面面积。

简化结构 B 截面 x 方向和 y 方向位移分别为



$$\Delta_{Bx} = \frac{F_xL_2^3\sin^2\theta_1}{3EI} + \frac{F_x(L_3\sin^2\theta_2 + L_2\cos^2\theta_1)}{EA} - \frac{F_x[(L_2\sin\theta_1 - L_3\cos\theta_2)^3 - (L_2\sin\theta_1)^3]}{3EI\cos\theta_2} \tag{6a}$$

$$\Delta_{By} = \frac{F_xL_2^3\sin\theta_1\cos\theta_1}{3EI} + \frac{F_x}{EI}\left[\frac{L_3^3\sin\theta_2\cos\theta_2}{3} - \frac{L_3^2L_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2)}{2} + L_2^2L_3\sin\theta_1\cos\theta_1\right] - \frac{F_x(L_2\sin\theta_1\cos\theta_1 + L_3\sin\theta_2\cos\theta_2)}{EA} \tag{6b}$$

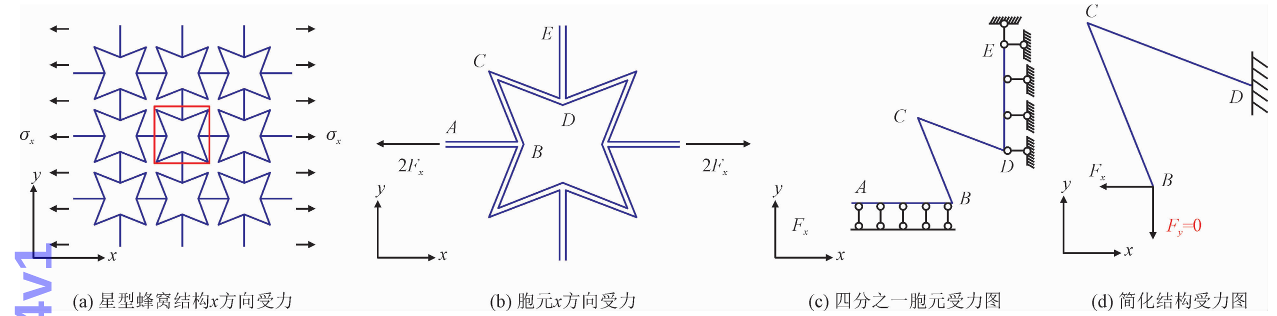


图 2　星型蜂窝结构受力简化图

Fig. 2　Stress diagram of star honeycomb structure

星型蜂窝结构在 x 方向单轴受拉情况下，对四分之一胞元及简化结构进行变形分析可知，四分之一胞元 A 点 y 方向位移等于简化结构 B 点 y 方向位移，四分之一胞元 A 点 x 方向位移等于 AB 杆拉伸长度加上简化结构 B 点 x 方向位移。因此可求得四分之一胞元 A 截面 x 方向和 y 方向位移分别为

$$\Delta_{Ax} = \frac{F_xL_2^3\sin^2\theta_1}{3EI} + \frac{F_x(L_3\sin^2\theta_2 + L_2\cos^2\theta_1)}{EA} - \frac{F_x[(L_2\sin\theta_1 - L_3\cos\theta_2)^3 - (L_2\sin\theta_1)^3]}{3EI\cos\theta_2} \tag{7a}$$

$$\Delta_{Ay} = -\frac{F_x(L_2\sin\theta_1\cos\theta_1 + L_3\sin\theta_2\cos\theta_2)}{EA} + \frac{F_x}{EI}\left[\frac{L_3^3\sin\theta_2\cos\theta_2}{3} + L_2^2L_3\sin\theta_1\cos\theta_1 - \frac{L_3^2L_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2)}{2}\right] + \frac{F_xL_2^3\sin\theta_1\cos\theta_1}{3EI} \tag{7b}$$

星型蜂窝结构在 x 方向单轴受拉情况下，结构的应变 ε_x'、ε_y'，等效泊松比 ν_{xy} 和等效杨氏模量 E_x 如下。

$$\varepsilon_x' = \frac{\sigma_x t\left(L_4 + L_2\sin\theta_1 - L_3\cos\theta_2 + \frac{b}{2}\right)\left\{\begin{aligned}&AL_2^3\sin^2\theta_1\cos\theta_2 - A[(L_2\sin\theta_1 - L_3\cos\theta_2)^3 - (L_2\sin\theta_1)^3] + \\ &3I\cos\theta_2(L_3\sin^2\theta_2 + L_2\cos^2\theta_1 + L_1)\end{aligned}\right\}}{3EIA\cos\theta_2\left(L_1 + L_3\sin\theta_2 - L_2\cos\theta_1 + \frac{b}{2}\right)} \tag{8a}$$

$$\varepsilon_y' = \frac{\sigma_x t\left\{\begin{aligned}&3A\left[\frac{L_3^3\sin\theta_2\cos\theta_2}{3} - \frac{L_3^2L_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2)}{2} + L_2^2L_3\sin\theta_1\cos\theta_1\right] + \\ &AL_2^3\sin\theta_1\cos\theta_1 - 3I(L_2\sin\theta_1\cos\theta_1 + L_3\sin\theta_2\cos\theta_2)\end{aligned}\right\}}{3EIA} \tag{8b}$$

$$\nu_{xy} = -\frac{\cos\theta_2\left(L_1 + L_3\sin\theta_2 - L_2\cos\theta_1 + \frac{b}{2}\right)\left\{\begin{aligned}&3A\left[\frac{L_3^3\sin\theta_2\cos\theta_2}{3} - \frac{L_3^2L_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2)}{2} + L_2^2L_3\sin\theta_1\cos\theta_1\right] + \\ &AL_2^3\sin\theta_1\cos\theta_1 - 3I(L_2\sin\theta_1\cos\theta_1 + L_3\sin\theta_2\cos\theta_2)\end{aligned}\right\}}{\left(L_4 + L_2\sin\theta_1 - L_3\cos\theta_2 + \frac{b}{2}\right)\left\{\begin{aligned}&AL_2^3\sin^2\theta_1\cos\theta_2 - A[(L_2\sin\theta_1 - L_3\cos\theta_2)^3 - (L_2\sin\theta_1)^3] + \\ &3I\cos\theta_2(L_3\sin^2\theta_2 + L_2\cos^2\theta_1 + L_1)\end{aligned}\right\}} \tag{8c}$$

$$E_x=\frac{3EAI\cos\theta_2\left(L_1+L_3\sin\theta_2-L_2\cos\theta_1+\frac{b}{2}\right)}{t\left(L_4+L_2\sin\theta_1-L_3\cos\theta_2+\frac{b}{2}\right)\left\{\begin{array}{l}AL_2^3\sin^2\theta_1\cos\theta_2-A[(L_2\sin\theta_1-L_3\cos\theta_2)^3-(L_2\sin\theta_1)^3]+\\3I\cos\theta_2(L_3\sin^2\theta_2+L_2\cos^2\theta_1+L_1)\end{array}\right\}} \tag{8d}$$

1.3.2 星型蜂窝结构 y 方向受力分析

同理,考虑星形蜂窝结构沿 y 方向单向拉伸的情况,结构处于弹性变形阶段。从周期星型蜂窝结构中切出 1 个代表胞元并最后简化为只分析包含 BC 斜壁板和 CD 斜壁板的简化结构,简化结构在 y 方向上的有效横截面积和总拉伸力分别为

$$A_y=t\left(L_1+L_3\sin\theta_2-L_2\cos\theta_1+\frac{b}{2}\right) \tag{9a}$$

$$F_y=\sigma_y A_y \tag{9b}$$

通过能量法可得到 D 截面 x 方向和 y 方向位移并最终求得 E 截面 x 方向和 y 方向位移分别为

$$\begin{aligned}\Delta_{Ex}=&\frac{F_y}{EI}\left(\frac{L_2^3\sin\theta_1\cos\theta_1}{3}-\frac{L_2^2L_3\cos\theta_1\cos\theta_2}{2}-\frac{L_2^2L_3\sin\theta_1\sin\theta_2}{2}+L_2L_3^2\sin\theta_2\cos\theta_2\right)-\\&\frac{F_y(L_2\sin\theta_1\cos\theta_1+L_3\sin\theta_2\cos\theta_2)}{EA}+\frac{L_3^3F_y\sin\theta_2\cos\theta_2}{3EI}\end{aligned} \tag{10a}$$

$$\Delta_{Ey}=\frac{F_y[(L_2\cos\theta_1-L_3\sin\theta_2)^3+(L_3\sin\theta_2)^3]}{3EI\cos\theta_1}+\frac{F_y(L_2\sin^2\theta_1+L_3\cos^2\theta_2+L_4)}{EA}+\frac{L_3^3F_y\sin^2\theta_2}{3EI} \tag{10b}$$

星型蜂窝结构在 y 方向单轴受拉情况下,结构应变 ε_x''、ε_y'',等效泊松比 ν_{yx} 和等效杨氏模量 E_y 如下。

$$\varepsilon_x''=\frac{\sigma_y t\left[\begin{array}{l}3A\left(\frac{L_2^3\sin\theta_1\cos\theta_1}{3}-\frac{L_2^2L_3\cos\theta_1\cos\theta_2+L_2^2L_3\sin\theta_1\sin\theta_2}{2}+L_2L_3^2\sin\theta_2\cos\theta_2\right)+\\AL_3^3\sin\theta_2\cos\theta_2-3I(L_2\sin\theta_1\cos\theta_1+L_3\sin\theta_2\cos\theta_2)\end{array}\right]}{3EIA} \tag{11a}$$

$$\varepsilon_y''=\frac{\sigma_y t\left(L_1+L_3\sin\theta_2-L_2\cos\theta_1+\frac{b}{2}\right)\left\{\begin{array}{l}L_3^3A\sin^2\theta_2\cos\theta_1+A[(L_2\cos\theta_1-L_3\sin\theta_2)^3+(L_3\sin\theta_2)^3]+\\3I\cos\theta_1(L_2\sin^2\theta_1+L_3\cos^2\theta_2+L_4)\end{array}\right\}}{3EIA\cos\theta_1\left(L_4+L_2\sin\theta_1-L_3\cos\theta_2+\frac{b}{2}\right)} \tag{11b}$$

$$\nu_{yx}=-\frac{\cos\theta_1\left(L_4+L_2\sin\theta_1-L_3\cos\theta_2+\frac{b}{2}\right)\left[\begin{array}{l}A(L_2^3\sin\theta_1\cos\theta_1+3L_2L_3^2\sin\theta_2\cos\theta_2-\\\frac{3L_2^2L_3\cos\theta_1\cos\theta_2+L_2^2L_3\sin\theta_1\sin\theta_2}{2})+\\AL_3^3\sin\theta_2\cos\theta_2-3I(L_2\sin\theta_1\cos\theta_1+L_3\sin\theta_2\cos\theta_2)\end{array}\right]}{\left(L_1+L_3\sin\theta_2-L_2\cos\theta_1+\frac{b}{2}\right)\left\{\begin{array}{l}L_3^3A\sin^2\theta_2\cos\theta_1+A[(L_2\cos\theta_1-L_3\sin\theta_2)^3+(L_3\sin\theta_2)^3]+\\3I\cos\theta_1(L_2\sin^2\theta_1+L_3\cos^2\theta_2+L_4)\end{array}\right\}} \tag{11c}$$

$$E_y=\frac{3EIA\cos\theta_1(L_4+L_2\sin\theta_1-L_3\cos\theta_2)}{t(L_1+L_3\sin\theta_2-L_2\cos\theta_1)\left\{\begin{array}{l}L_3^3A\sin^2\theta_2\cos\theta_1+3I\cos\theta_1(L_2\sin^2\theta_1+L_3\cos^2\theta_2+L_4)+\\A[(L_2\cos\theta_1-L_3\sin\theta_2)^3+(L_3\sin\theta_2)^3]\end{array}\right\}} \tag{11d}$$

1.3.3 星型蜂窝结构其他方向受力分析

当蜂窝结构在其他方向受力时,其分析过程可以简化为 x 方向受力和 y 方向受力的叠加。如图 3 所示,σ_φ 为与 x 轴成 φ 角方向的拉伸应力,从周期星型蜂窝结构中切出 1 个代表胞元进行力学分析,代表胞元有效横截面积 A_φ 和总拉伸力 F_φ 分别为

$$A_\varphi=t(2A_x\sin\varphi+2A_y\cos\varphi) \tag{12a}$$

$$F_\varphi=\sigma_\varphi A_\varphi \tag{12b}$$

将总拉伸力 F_φ 分别向 x 方向和 y 方向进行投影可得

$$F_x^\varphi=F_\varphi\cos\varphi \tag{13a}$$

$$F_y^\varphi=F_\varphi\sin\varphi \tag{13b}$$

代表胞元在 x 方向上的应变 ε_x^φ、在 y 方向上的应变 ε_y^φ、在与 x 轴成 φ 角方向上的应变 ε_n^φ、在与 x 轴成 $\varphi+\frac{\pi}{2}$ 角方向上的应变 ε_τ^φ 为

$$\varepsilon_x^{\varphi} = \frac{F_x^{\varphi}\varepsilon_x^{'}}{F_x} + \frac{F_y^{\varphi}\varepsilon_x^{''}}{F_y} \tag{14a}$$

$$\varepsilon_y^{\varphi} = \frac{F_x^{\varphi}\varepsilon_y^{'}}{F_x} + \frac{F_y^{\varphi}\varepsilon_y^{''}}{F_y} \tag{14b}$$

$$\varepsilon_n^{\varphi} = \varepsilon_x^{\varphi}\cos\varphi + \varepsilon_y^{\varphi}\sin\varphi \tag{14c}$$

$$\varepsilon_\tau^{\varphi} = \varepsilon_x^{\varphi}\sin\varphi + \varepsilon_y^{\varphi}\cos\varphi \tag{14d}$$

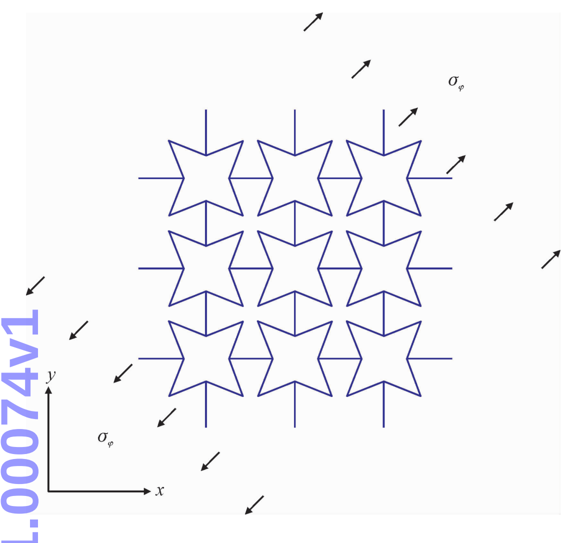


图 3　星型蜂窝结构其他方向受力

Fig. 3　Star honeycomb structure receives force in other directions

星型蜂窝结构在与 x 轴成 φ 角方向上单轴受拉情况下，等效泊松比 $\nu_{n\tau}^{\varphi}$ 和等效杨氏模量 E_φ 表示为

$$\nu_{n\tau}^{\varphi} = -\frac{\varepsilon_\tau^{\varphi}}{\varepsilon_n^{\varphi}} \tag{15a}$$

$$E_\varphi = \frac{\sigma_\varphi}{\varepsilon_n^{\varphi}} \tag{15b}$$

2　有限元仿真分析

为验证模型结果，采用商用软件 ANSYS 19.0 对星型蜂窝结构进行了有限元分析。分析中使用了梁单元 BEAM188，该单元基于 Timoshenko 梁理论[28]，忽略梁剪切变形，可以保证有限元计算结果收敛。建立 20×20 胞元的参数化模型进行数值分析，其有限元模型示意图如图 4 所示。边界条件为：左截面三角形位置约束 x 方向位移，下截面三角形位置约束 y 方向位移，右截面施加水平向右的均布力，约束所有节点面外方向的自由度。此外，蜂窝胞壁之间的接触采用自动单面接触算法，蜂窝和上下两个刚性板之间的接触采用自动面－面接触算法。模型的网格总数为 146 870 个。

图 5 为理论模型与有限元模型对比分析结果示意图。其中，x 轴为结构所受应力，y 轴为结构位移。本研究理论模型与相对精细的有限元模型最大误差为 2.8%，结果吻合良好。

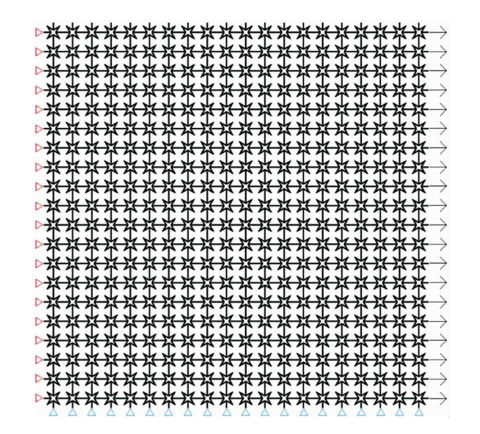


图 4　有限元模型图

Fig. 4　FEM diagram

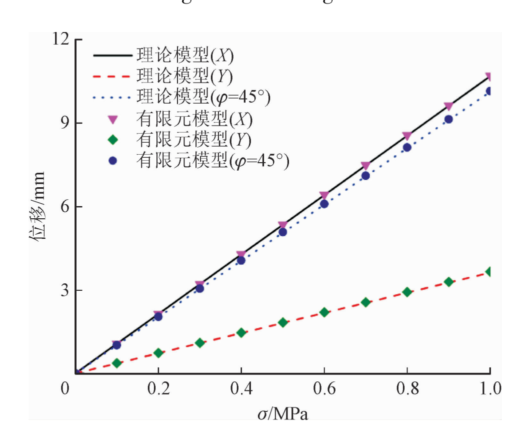


图 5　理论模型与有限元模型结果图

Fig. 5　Graph of analytic model and FEM model results

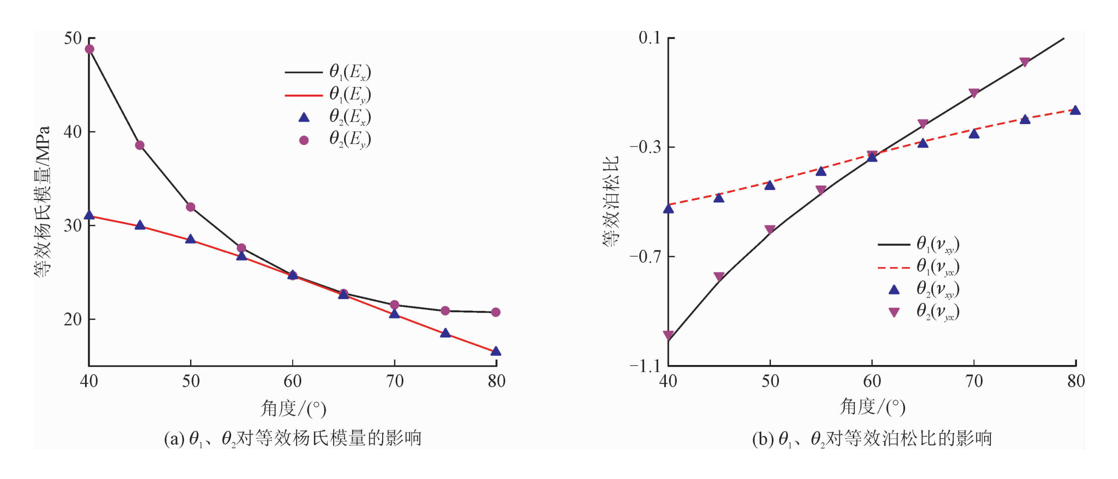
建立 20×20、40×40、60×60、80×80 的胞元参数化模型进行数值分析，误差分别为 2.8%、1.9%、1.5%、1.1%，胞元个数越多，本研究结果精度越高。

3　结果和讨论

为了研究几何参数对蜂窝结构力学性能的影响，分别对 θ_1，θ_2，L_1，L_2，L_3，L_4 6 个几何参数进行参数分析，图 6 ~ 图 10 为几何参数对等效杨氏模量和等效泊松比的影响示意图。

从图 6 ~ 图 10 影响示意图可得：随着胞元角度 θ_1、θ_2 增大，等效杨氏模量 E_x 和 E_y 减小，等效泊松比 υ_{xy} 和 υ_{yx} 增大；随着壁板长度 L_1 增大，等效杨氏模量 E_x 增大，E_y 减小，等效泊松比 υ_{xy} 减小，υ_{yx} 增大；

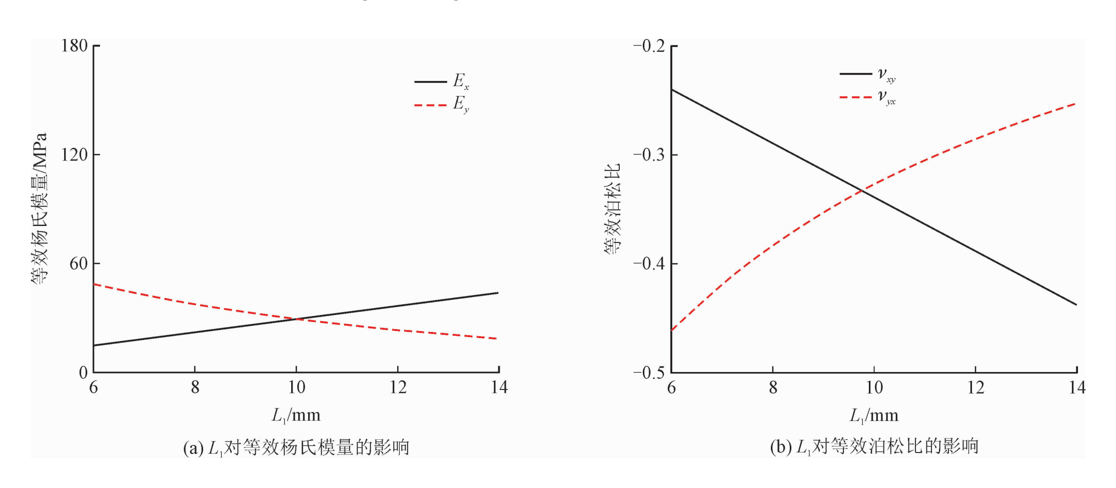
随着壁板长度L_2增大,等效杨氏模量E_x增大,E_y减小,等效泊松比υ_{xy}先减小后增大,υ_{yx}减小;随着壁板长度L_3增大,等效杨氏模量E_x增大,E_y减小,等效泊松比υ_{xy}减小,υ_{yx}先减小后增大;随着壁板长度L_4增大,等效杨氏模量E_x减小,E_y增大,等效泊松比υ_{xy}减小,υ_{yx}增大。



(a) θ_1、θ_2对等效杨氏模量的影响 (b) θ_1、θ_2对等效泊松比的影响

图 6 θ_1、θ_2 影响示意图

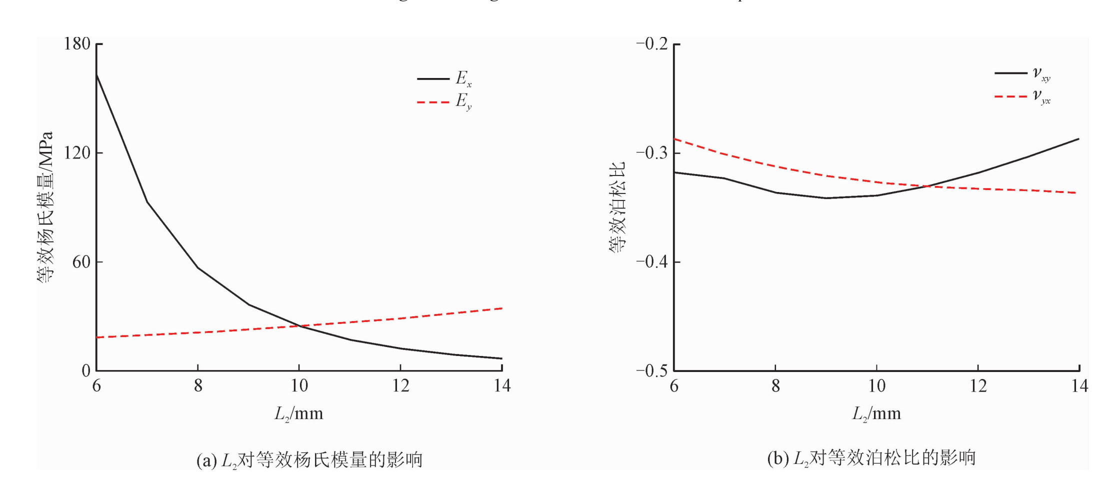
Fig. 6 Diagram of the influence of θ_1 and θ_2



(a) L_1对等效杨氏模量的影响 (b) L_1对等效泊松比的影响

图 7 L_1 影响示意图

Fig. 7 Diagram of the influence of L_1



(a) L_2对等效杨氏模量的影响 (b) L_2对等效泊松比的影响

图 8 L_2 影响示意图

Fig. 8 Diagram of the influence of L_2

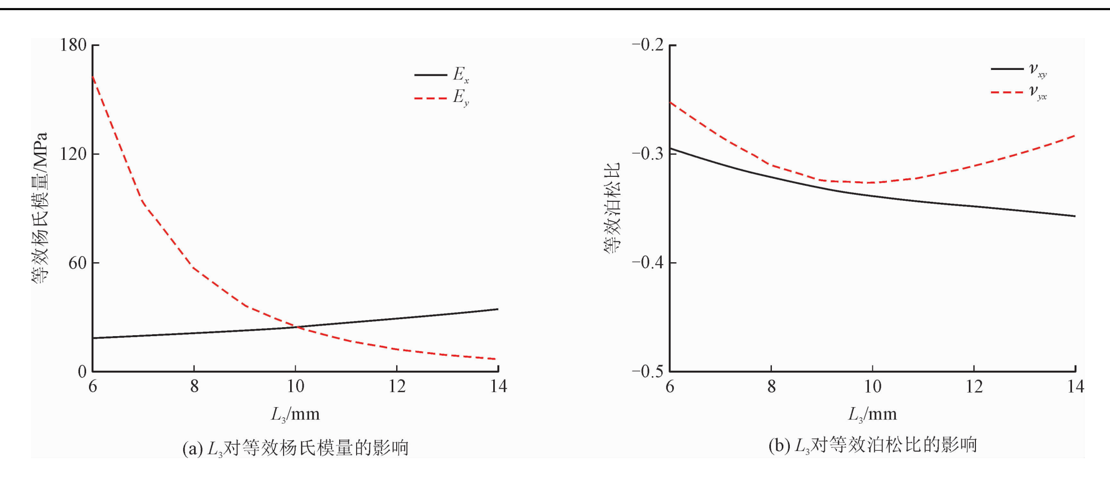


图 9　L_3 影响示意图

Fig. 9　Diagram of the influence of L_3

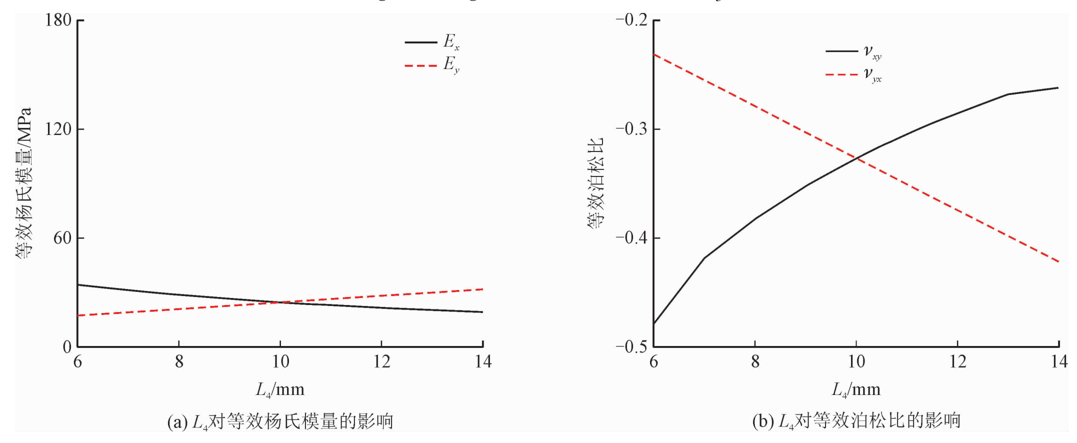


图 10　L_4 影响示意图

Fig. 10　Diagram of the influence of L_4

胞元角度θ_1和θ_2对等效杨氏模量影响之处在于胞元角度和荷载方向的相对关系，胞元角度使壁板越接近平行于荷载方向，壁板相对承受更多轴向力，承受更少弯矩，胞元壁板在荷载方向上的变形越小，等效杨氏模量越大；胞元角度θ_1和θ_2对等效泊松比影响之处在于胞元的内凹程度，结构沿 x 方向单轴压缩时，胞元角度θ_1、θ_2越大，胞元内凹程度越小，y 方向内凹变形越小，当θ_1、θ_2足够大时，胞元变形由 y 方向内凹变形转变为外凸变形，泊松比体现为由负到正。

壁板长度L_1、L_3对等效杨氏模量E_x影响之处在于，结构 x 方向受力时，壁板长度L_1、L_3增大对胞元在 x 方向变形的影响低于壁板长度L_1、L_3增大在 x 方向投影的影响，使得 x 方向应变降低，杨氏模量E_x增加；壁板长度L_1、L_3对等效杨氏模量E_y影响之处在于，结构 y 方向受力时，壁板长度L_1、L_3增大使得胞元受力面积增加，胞元应变增加，应力不变，杨氏模量E_y减小。

壁板长度L_2、L_4对等效杨氏模量E_x影响之处在于，结构 x 方向受力时，壁板长度L_2、L_4增大使得胞元受力面积增加，胞元应变增加，应力不变，杨氏模量E_x减小；壁板长度L_2、L_4对等效杨氏模量E_y影响之处在于，壁板长度L_2、L_4增大对胞元在 y 方向变形的影响低于壁板长度L_2、L_4增大在 y 方向投影的影响，使得 y 方向应变降低，杨氏模量E_y增加。并且几何参数θ_1和θ_2、L_1和L_4、L_2和L_3对星形结构等效杨氏模量和泊松比的影响具有反对称性。

星型蜂窝结构体现出明显的负泊松比效应，同时，当胞元的几何参数为$\theta_1=\theta_2=60°$，$L_1=L_2=L_3=L_4=10$ mm 时，星型蜂窝结构的等效杨氏模量$E_x=E_y$，等效泊松比$\boldsymbol{v}_{xy}=\boldsymbol{v}_{yx}$。

4　结　论

针对正交各向异性二维周期性星形蜂窝结构，本研究给出了其在弹性变形范围内面内等效力学性

能的理论计算模型，该模型可以通过调整几何参数，方便地得到结构的面内等效力学性能。由于本研究所选取的胞元具有良好的普遍性，因此它能够反映不同形式的星型蜂窝结构的力学模型。

本研究的模型推导中，首先针对代表性胞元分析其在不同方向承受荷载时的变形行为，利用对称性对胞元进一步简化的同时运用能量法计算得到了结构胞元的等效位移，进而得出结构胞元的应变、等效杨氏模量和等效泊松比，然后利用参数分析进一步研究了主要几何参数对星形结构面内等效力学性能的影响。本研究结论如下。

1）星型蜂窝结构具有明显的负泊松比效应。

2）得出θ_1，θ_2，L_1，L_2，L_3，$L_4$6 个几何参数对于结构等效杨氏模量与等效泊松比的影响。

3）当胞元的几何参数为$\theta_1 = \theta_2 = 60°$，$L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 10$ mm 时，星型蜂窝结构的等效杨氏模量$E_x = E_y$，等效泊松比$\upsilon_{xy} = \upsilon_{yx}$。

4）几何参数θ_1和θ_2、L_1和L_4、L_2和L_3对星形结构等效杨氏模量和泊松比的影响具有反对称性。

参考文献：

［1］ 周青，夏勇，聂冰冰. 汽车碰撞安全与轻量化研发中的若干挑战性课题［J］. 中国公路学报，2019，32(7)：1-14.
ZHOU Qing，XIA Yong，NIE Bingbing. Challenging topics in research of vehicle crash safety and light weighting［J］. China journal of highway and transport，2019，32(7)：1-14 (in Chinese).

［2］ WU T Y，LI M. Research on non-pneumatic tire with gradient anti-tetrachiral structures［J］. Mechanics of advanced materials and structures，2020，28(22)：1-9.

［3］ 赵万忠，赵宏宇，王春燕. 基于负泊松比结构的汽车 B 柱结构耐撞性优化设计［J］. 江苏大学学报(自然科学版)，2020，41(2)：166-171.
ZHAO Wanzhong，ZHAO Hongyu，WANG Chunyan. Crash-worthiness optimization design of automobile B-pillar structure based on negative Poisson's ratio structure.［J］. Journal of Jiangsu University (natural science edition)，2020，41(2)：166-171 (in Chinese).

［4］ 邹松春. 负泊松比结构车身零件耐撞性优化设计［D］. 南京：南京航空航天大学，2019.

［5］ 刘赛，杜赵群. 负泊松比功能的结构复合纺纱技术进展［J］. 毛纺科技，2020，48(6)：8-12.
LIU Sai，DU Zhaoqun. Progress in structural composite spinning with negative Poisson's ratio function［J］. Wool textile journal. 2020，48(6)：8-12 (in Chinese).

［6］ EVANSK E. Auxetic polymers［J］. Membrane technology，2001，2001(137)：9.

［7］ SHARPE F R. Review：A. E. H. Love，A treatise on the mathematical theory of elasticity［J］. Bulletin of the American mathematical society，1909，16(2)：90-92.

［8］ LAKES R. Foam structures with a negative Poisson's ratio［J］. Science，1987，235：1038-1040.

［9］ ZI X，LU X L. Novel structure with negative Poisson's ratio and enhanced Young's modulus［J］. Composite structures，2016，138：243-252.

［10］ SUN Y T，CHEN Q. Elastic and transport properties of the tailorable multifunctional hierarchical honeycombs［J］. Composite structures，2014，107(1)：698-710.

［11］ WANG T，WANG L M. Elastic analysis of auxetic cellular structure consisting of re-entrant hexagonal cells using a strain-based expansion homogenization method［J］. Materials & design，2018，160：284-293.

［12］ 马芳武，梁鸿宇. 倾斜荷载下内凹三角形负泊松比材料的面内冲击动力学性能［J］. 振动与冲击，2020，39(4)：81-87.
MA Fangwu，LIANG Hongyu. In-plane impact dynamics of concave triangular material with negative Poisson's ratio under inclined load［J］. Journal of vibration and shock，2020，39(4)：81-87 (in Chinese).

［13］ 周宏元，贾昆程，王小娟. 负泊松比三明治结构填充泡沫混凝土的面内压缩性能［J］. 复合材料学报，2020，37(8)：2005-2014.
ZHOU Hongyuan，JIA Kuncheng，WANG Xiaojuan. In-plane compression behavior of foamed concrete filled with negative Poisson's ratio sandwich structure［J］. Acta materiae compositae Sinica，2020，37(8)：2005-2014. (in Chinese).

［14］ WU W W，HU W X. Mechanical design and multifunctional applica- tions of chiral mechanical metamaterials：A review［J］. Materials & design，2019，180：107950.

［15］ JIN E J，LEE I S. Metal-organic framework based on hinged cube tessellation as transformable mechanical metamaterial［J］. Science advances，2019，5(5)：4119.

［16］ LIM T C. Metamaterials with Poisson's ratio sign toggling by means of microstructural duality［J］. SN applied sciences，2019，1(2)：1-13.

［17］ XUE Y Y，GAO P X. An enhanced three-dimensional auxetic lattice structure with improved property［J］. Materials，2020，13(4)：1008.

［18］ PARSONSE M. Lightweight cellular metal composites with zero and tunable thermal expansion enabled by ultrasonic additive manufacturing：Modeling，manufacturing，and testing［J］. Composite structures，2019，223：110656.

［19］ YASUDA H，GOPALARETHINAM B. Origami-Based Cellular Structures with in situ transition between collapsible and load-bearing configurations［J］. Advanced engineering materials，2019，21(12)：1900562.

［20］ CHEN Z Y，WU X，XIE Y M，et al. Re-entrant auxetic lattices with enhanced stiffness：A numerical study［J］. International journal of mechanical sciences，2020，178：105619.

［21］ THEOCARIS P S，STAVROULAKIS G E. Negative Poisson's ratios in composites with star-shaped inclusions：A numerical homogeniza-

tion approach[J]. Archive of applied mechanics, 1997, 67(4): 274-286.

[22] REIS F D, GANGHOFFER J F. Equivalent mechanical properties of auxetic lattices from discrete homogenization[J]. Computational materials science, 2012, 51(1): 314-321.

[23] GONG X B, HUANG J. Zero Poisson's ratio cellular structure for two-dimensional morphing applications[J]. Composite structures, 2015, 134: 384-392.

[24] MENG J, DENG Z, ZHANG K, et al. Band gap analysis of star-shaped honeycombs with varied Poisson's ratio[J]. Smart materials and structures, 2015, 24(9): 95011.

[25] 王梁，刘海涛. X 型内凹蜂窝结构的拉伸力学行为研究[J]. 机械强度，2020，42(4)：896-900.
WANG Liang, LIU Haitao. Study on tensile behavior of X-shaped concave honeycomb structures[J]. Journal of mechanical strength, 2020, 42(4): 896-900 (in Chinese).

[26] 韩会龙，张新春. 星形节点周期性蜂窝结构的面内动力学响应特性研究[J]. 振动与冲击，2017，36(23)：223-231.
HANG Huilong, ZHANG Xinchun. Study on in-plane dynamic response characteristics of periodic honeycomb structures with star nodes[J]. Journal of vibration and shock, 2017, 36(23): 223-231 (in Chinese).

[27] 贠昊，邓子辰，朱志韦. 弹性波在星形节点周期结构蜂窝材料中的传播特性研究[J]. 应用数学和力学，2015，36(8)：814-820.
YUN Hao, DENG Zichen, ZHU Zhiwei. Propagation characteristics of elastic waves in periodic honeycomb materials with star nodes[J]. Applied mathematics and mechanics, 2015, 36(8): 814-820 (in Chinese).

[28] 卢子兴，王欢，杨振宇，等. 星型-箭头蜂窝结构的面内动态压溃行为[J]. 复合材料学报，2019，36(8)：1893-1900.
LU Zixing, WANG Huan, YANG Zhenyu, et al. In-plane dynamic crushing behavior of star-arrow honeycomb structures[J]. Acta materiae compositae Sinica, 2019, 36(8): 1893-1900 (in Chinese).

[29] WANG W, DAI S, ZHAO W, et al. Reliability-based optimization of a novel negative Poisson's ratio door anti-collision beam under side impact[J]. Thin-walled structures, 2020, 154(1): 106863.

[30] TIMOSHENKO S P, GERE J. Theory of elastic stability[J]. Journal of applied mechanics, 1962, 29(1): 220-221.

（编辑　张璐）

